matematiikkakilpailu.fi - för sommaren 2019

översatt av Edward Krogius

21 juni 2019

Om träningsuppgifterna för matematikolympiader 2019

Denna information och mera finns på finska på. https://matematiikkakilpailut.fi

Svaren på träningsproblem önskas inlämnade före utgången av augusti 2019 personligen överräckta, skickade med epost till **npalojar@abo.fi** eller med post till

Neea Palojärvi
Ratapihankatu 12 A 1
20100 Turku

De som valts till matematikolympiadgruppen bör öva så mycket som möjligt inför tävlingen och för övriga ses lösningen av uppgifterna som en merit inför framtida representationsgruppsval inför kommande tävlingar.

Det lönar sig att pröva och vara uthärdig. Även de enklare uppgifterna är svårare än vanliga skoluppgifter, antag inte att det går att lösa problemen utan ansträngningar. Även om man inte hittar en lösning hjälper det att ha funderat och prövat på olika lösningar när man ska lära sig vid genomgång av modelllösningarna senare.

I en del av uppgifterna här kan det vara nyttigt att känna till primitiva rötter. De kan man bekanta sig med tex. i artikeln som Esa Vesalainen har skrivit:

”Lyhyt johdatus alkeelliseen lukuteoriaan” kapitel 4 klicka här.

(matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/laajalukuteoriamoniste.pdf)

Enklare uppgifter

1. En talföljd med positiva heltal börjar med 2018, 121, 16, ... Varje element efter det första är kvadraten av det föregående elementets siffersumma. Vilket element är det 2018:nde elementet i talföljden ?

2. Finns det ett positivt heltal n med 9 delare, som kan placeras i en 3x3 kvadrat så att produkten av varje rad, kolumn och diagonal är samma ? (Med delare menas här alla de positiva heltal som delar talet jämnt, inklusive talet själv. Talet 4 har tex. delarna 1,2,4)

3. Ett visst år inträffade inte den första januari under ett veckoslut, men den sista dagen i december samma år gjorde det. Skolan började den 15. augusti. Vilken veckodag var det ?

4. Jösse gjorde följande konjektur (antagande/förmodan) i sin matteklubb: Låt två heltal x och y, som saknar gemensamma multipler ha en produkt som delas av a och b utan gemensamma multipler. Då är åtminstone det ena av talen x och y delbart med antingen a eller b. Är Jösses konjektur sann ?

5. Kvadraten ABCD har en punkt F på sidan BC och en punkt E innanför kvadraten. Triangeln DEC är liksidig och EB = EF som i bilden nedanför. Bestäm storleken av vinkeln $\angle CEF$.

6. Hur många spetsiga vinklar kan en konvex polygon ha ? Redogör för alla alternativ.

7. (a) Visa för alla heltal n att uttrycket $n^3 - n$ delas av 6.

   (b) Sök alla x som uppfyller kongruensvillkoret $29x^{33} \equiv 27 (mod 11)$

8. Lös $x^2(2-x)^2 = 1 + 2(1-x)^2$.

9. Ett fyrsiffrigt tal uppfyller villkoret

   ABCD = A x BCD + ABC x D

   Vilket är det minsta värde som ABCD kan ha ?

10. Alisa spelar följande spel med lådorna A och B. I början finns det n slantar i A och B är tom. På ett drag kan en slant flyttas från A till B eller så kan lika många slantar k avlägsnas från A som det finns i B. Alisa vinner spelet då lådan A är tom.

    (a) Visa att det går att vinna på 4 drag om det finns 6 slantar i A från början.

    (b) I början finns 2018 slantar i A. Vilket är det minsta antal drag med vilka Alisa vinner ?

Svårare uppgifter

1. Antag att M och N är innerpunkter i triangeln ABC och att vinklarna

$$\angle MAB = \angle NAC \textbf{ och } \angle MBA = \angle NBC.$$

Bevisa att

$$\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1$$

2. Låt ABCD vara en kvadrat, vars mittpunkt är O. En med AD parallell linje genom O skär AB och CD i punkterna M och N, och en med sträckan AB parallell linje skär diagonalen AC i punkten P. Visa att

$$OP^4 + \left(\frac{MN}{2}\right)^4 = MP^2 \cdot NP^2$$

3. Bevisa olikheten för de positiva talen a,b,c,d :

$$2 \ \le \ \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \frac{a_3}{a_4 + a_1} + \frac{a_4}{a_1 + a_2}$$

4. Låt $p \geq 3$ vara ett primtal. Vi definierar

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{120}, f(p) = \frac{1}{2} - \{\frac{F(p)}{p}\}$$

där $\{x\} = x - [x]$ är decimaldelen av talet x. Bestäm f(p).

5. Finn alla de tvåsiffriga heltal n = 10a+b $(a, b \in \{0, 1, \ldots 9\}, a \neq 0)$, som delar talet $k^a - k^b$ för alla heltal k.

6. Finn alla reella funktioner f(x), som är definierade och kontinuerliga i intervallet (-1,1) och som uppfyller villkoret

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)} \ , \ (x, y, x + y \in (-1, 1)).$$

7. Sju studeranden skriver matematikprov. För varje uppgift fanns högst 3 studeranden som löste uppgiften. För varje studerandepar fanns åtminstone en uppgift som båda löste. Bestäm med bevis det minsta möjliga antalet uppgifter i provet.

8. I ett 5x5 rutfälts varje ruta finns en lampa som är av. Om man berör en lampa, byter lampan och varje närliggande lampa sitt tillstånd. Efter ett visst antal beröringar är endast en lampa kvar. Ange alla möjliga rutor där den lampan kan vara.

   Observera: Närliggande rutor har en gemensam sida.

9. Två talföljder med reella tal $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ och $y_1, y_2, y_3, ...y_n$ definieras som:

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3} \ , \ x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2}$$

och

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}}$$

för alla $n \geq 1$. Visa att $2 < x_n y_n < 3$ för alla n > 1

10. Finn alla positiva heltal k, för vilka gäller att om F(x) är ett polynom, med heltalskoefficienter, som uppfyller villkoret

$$0 \leq F(c) \leq k \text{ , då } c = 0, 1, \ldots, k+1$$
$$\text{är } F(0) = F(1) = ... = F(k+1)$$